Tentamen i Mekanik 1 (FFM516)

Tid och plats: Tisdagen den 5 januari 2016 klockan 14.00-17.00 i Maskin-salar.
Hjälpmedel: Inga
Examinator: Ulf Gran
Jour: Ulf Gran, tel. 031-7723182, besöker tentamenssalarna c:a kl. 15.00 och 16.00.

Rättningsprinciper: Alla svar skall motiveras, införda storheter förklaras liksom val av metoder. Lösningarna förväntas vara välstrukturerade och begripligt presenterade. Erhållna svar ska, om möjligt, analyseras m.a.p. dimension och rimlighet. Skriv och rita tydligt! Varje uppgift bedöms med 0, 1, 2 eller 3 poäng enligt följande principer:

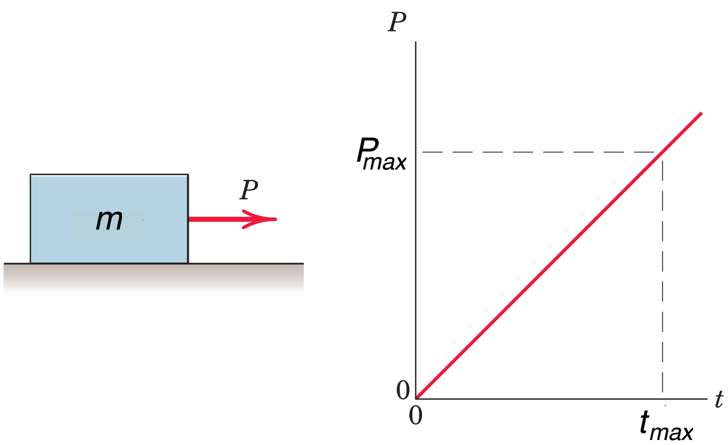
- För 3 poäng krävs en helt korrekt lösning.
- Mindre fel ger 1 poängs avdrag.
- Allvarliga fel (t ex dimensionsfel eller andra orimliga resultat) ger 2 poängs avdrag.
- Allvarliga principiella fel ger 0 poäng på uppgiften.
- Ofullständiga, men för övrigt korrekta, lösningar kan ge max 1 poäng. Detsamma gäller lösningsförslag vars presentation är omöjlig att följa.

Betygsgränser: Varje uppgift ger maximalt 3 poäng, vilket innebär totalt maximalt 9 poäng på denna deltentamen. För att bli godkänd krävs minst tre poäng och 3-5 poäng ger betyg 3, 6-7 poäng ger betyg 4 och 8-9 poäng ger betyg 5.

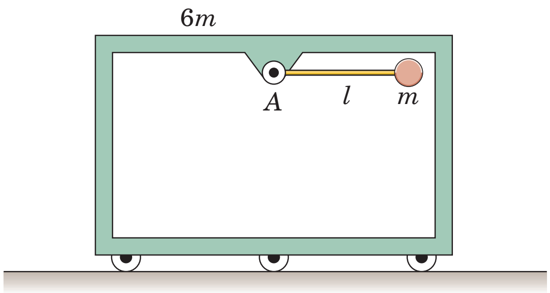
Rättningsgranskning: Datum och plats meddelas via mail (för studenter registrerade i PingPong) och via kurshemsidan.

Uppgifter

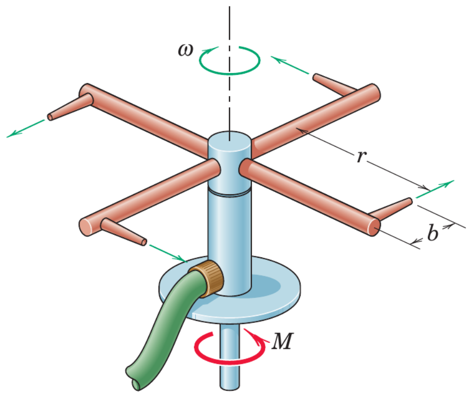
1. Klossen har massan m och påverkas av en kraft P som varierar linjärt från $P = 0$ vid tiden $t = 0$ till ett givet maximalt värde $P = P_{max}$ vid tiden $t = t_{max}$. Den statiska och kinetiska friktionskoefficienten mellan klossen och underlaget är μ_s respektive μ_k. Bestäm klossens hastighet vid tiden $t = t_{max}$ om den startar i vila vid tiden $t = 0$.



2. Systemet bestående av vagnen med massan $6m$ och kulan med massan m släpps i vila i det avbildade läget. Bestäm kulans hastighet *relativt vagnen* i det ögonblick då stången med längden l är vertikal. (Den masslösa stången vrider sig fritt kring A. Vagnen rör sig friktionslöst.)



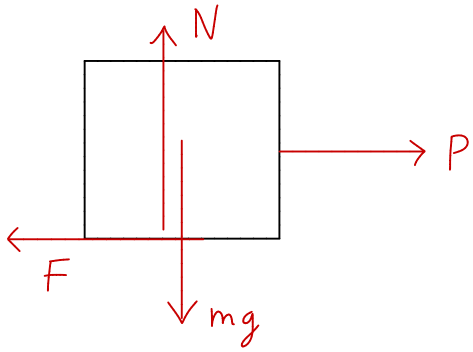
3. En sprinkler roterar med den *konstanta* vinkelhastigheten ω och distribuerar vatten (densitet ρ) med en volymstakt Q (totalt flöde in genom slangen). Varje munstycke har öppningsarean A. Vilket vridmoment M måste verka på axeln?



Lycka till!

1) Sökt: Klossens hastighet vid tiden t_{max}.

Friläggning av kloss:



Kraften P varierar linjärt från $P(0)=0$ till $P(t_{max}) = P_{max}$, dvs

$$P(t) = P_{max}\frac{t}{t_{max}}$$

Rörelseekvationerna för klossen är från friläggningen:

$$\uparrow:\ N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad ①$$

$$\rightarrow:\ P - F = ma \quad ②$$

Maximal friktion ges av $F = \mu_s N = \mu_s mg$, dvs klossen står still tills $P(t_{glid}) = \mu_s m g \Leftrightarrow t_{glid} = t_{max}\frac{\mu_s m g}{P_{max}}$

När $t > t_{glid}$ gäller $F = \mu_k mg$ och ② ger

$$a = \frac{1}{m}P_{max}\frac{t}{t_{max}} - \mu_k g$$

$$\Rightarrow v_{max} = \int_{t_{glid}}^{t_{max}} a\,dt = \left[\frac{1}{m}P_{max}\frac{t^2}{2t_{max}} - \mu_k g\cdot t\right]_{t_{glid}}^{t_{max}}$$

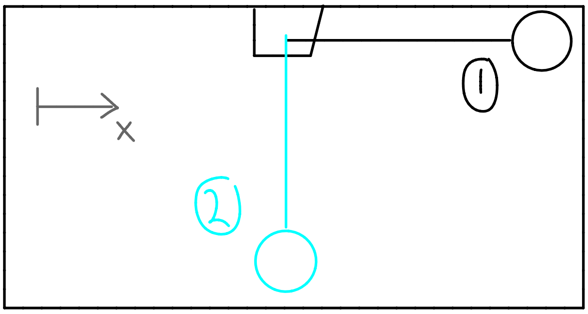
$$= \frac{P_{max}t_{max}}{2m} - P_{max}\frac{t_{glid}}{2t_{max}m} - \mu_k g t_{max} + \mu_k g t_{glid}$$

$$= \frac{P_{max}t_{max}}{2m} - \frac{t_{max}}{2P_{max}m}(\mu_s m g)^2 - \mu_k g t_{max} + \mu_k\mu_s m g^2\frac{t_{max}}{P_{max}}$$

$$= \frac{P_{max}t_{max}}{2m}\left(1 - \left(\frac{\mu_s m g}{P_{max}}\right)^2\right) - \mu_k g t_{max}\left(1 - \frac{\mu_s m g}{P_{max}}\right)$$

(I sista steget är parenteserna dimensionslösa så att enhetsanalysen är $\left[\frac{P_{max}t_{max}}{m}\right] = [g t_{max}] = \frac{m}{s}$)

2) Sökt: Relativa hastigheten vid läge 2.



Under förloppet är det endast tyngdkraften som uträttar ett arbete på systemet. Vidare ger inga externa krafter någon impuls i horisontell led så att rörelsemängden är bevarad.

Låt V_V och V_k beteckna vagnens och kulans hastighet relativt underlaget (med positiv riktning enligt figur).

$$\begin{cases} mV_k + 6mV_V = 0 & \text{①} \quad \text{(rörelsemängd bevarad)} \\ \frac{mV_k^2}{2} + \frac{6mV_V^2}{2} = U_{12} = mg\ell & \text{②} \quad \text{(arbete - energi)} \end{cases}$$

$$\text{①} \Rightarrow V_k = -6V_V$$

$$\text{①} \curvearrowright \text{②}: \quad 21V_V^2 = g\ell \Rightarrow V_V = \sqrt{\frac{g\ell}{21}}$$

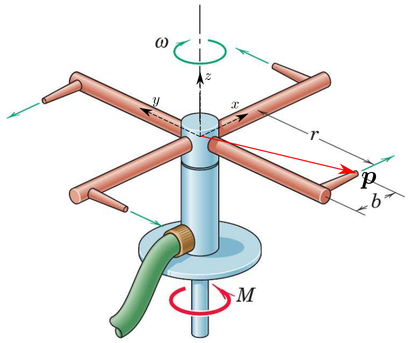
$$V_k = -6\sqrt{\frac{g\ell}{21}}$$

Den relativa hastigheten (hastigheten som en observatör i vagnen mäter) är

$$V_{rel} = V_k - V_V = -\sqrt{\frac{7g\ell}{3}} \qquad \left[\sqrt{g\ell}\right] = \sqrt{\frac{m}{s^2}\cdot m} = \frac{m}{s}$$

3)

Sökt: Vridmoment M så att rotationshastigheten är konstant ω.



Totala massflödet ges av volymsflödet gånger densiteten. Vattnets fart ut genom munstyckena ges av totala flödet genom totala utmynningsarean.

$$\begin{aligned} m' &= Q\rho \\ v_{\text{ut}} &= \frac{Q}{A_{\text{tot}}} \\ &= \frac{Q}{4A} \end{aligned}$$

Vi kan nu använda relationen mellan totala externa momentet som verkar på ett system och dess förändring i rörelsemängdsmoment:

$$M = m'\left(\vec{d}_{\text{ut}} \times \underbrace{(\vec{v}_p + \vec{v}_{\text{ut}})}_{\substack{\text{vattnets totala}\\ \text{hastighet}}} - \underbrace{\vec{d}_{\text{in}} \times \vec{v}_{\text{in}}}_{0}\right)$$

I det angivna koordinatsystemet har vi $\vec{d}_{\text{ut}} = \vec{p} = b\hat{x} - r\hat{y}$. Hastigheten för vattnet är hastigheten för punkten p plus vattnets utströmmningshastighet i $\hat{x}$-led (för just detta val av koordinater).

Farten för punkten p ges av avståndet $|\vec{p}|$ multiplicerat med vinkelhastigheten ω. Dess hastighet är alltså vinkelrät mot $\vec{p}$ med beloppet $\omega|\vec{p}|$. En vektor vinkelrät mot $\vec{p}$ får man genom att byta x- och y komponenter och samtidigt byta tecken på en av dem (vilket teckenbyte som är rätt fås genom att jämföra riktningarna med figuren). Hastigheten är alltså

$$\vec{v}_p = \omega(-r\hat{x} - b\hat{y}).$$

(Detta kan fås enklare genom relationen $\vec{v}_p = \omega \times \vec{p} = -\omega b\hat{y} - \omega r\hat{x}$, där man får tänka på att $\omega = -\omega\hat{z}$)

$$\begin{aligned} M &= Q\rho p \times (\vec{v}_p + v_{\text{ut}}\hat{x}) \\ &= Q\rho(b\hat{x} - r\hat{y}) \times (-\omega b\hat{y} - \omega r\hat{x} + v_{\text{ut}}\hat{x}) \\ &= Q\rho(-\omega b^2 - \omega r^2 + r v_{\text{ut}})\hat{z} \\ &= Q\rho\left(\frac{Qr}{4A} - \omega(b^2 + r^2)\right)\hat{z} \end{aligned}$$

Från figuren har vi $M = M\hat{z}$ så från ovanstående räkning ges

$$M = Q\rho\left(\frac{Qr}{4A} - \omega(b^2 + r^2)\right)$$

($[M] = \frac{m^3}{s}\frac{kg}{m^3}\left(\frac{m^3 m}{s m^2} - \frac{m^2}{s}\right) = \frac{kg m^2}{s^2} = \text{kraft}*\text{avstånd}$)